



**SEMESTRAL**

**UNI**

[academiacesarvallejo.edu.pe](http://academiacesarvallejo.edu.pe)

— ACADEMIA —  
**CÉSAR**  
**VALLEJO**

— ACADEMIA —  
**CÉSAR**  
**VALLEJO**

— ACADEMIA —  
**CÉSAR**  
**VALLEJO**

— ACADEMIA —  
**CÉSAR**  
**VALLEJO**

**SEMESTRAL**  
**UNI**

— ACADEMIA —  
**CÉSAR**  
**VALLEJO**

— ACADEMIA —  
**CÉSAR**  
**VALLEJO**

# ***GEOMETRÍA***

***CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS***

***PLANA DE GEOMETRÍA***

[academiacesarvallejo.edu.pe](http://academiacesarvallejo.edu.pe)

# CONGRUENCIA

## OBJETIVOS

**1**

**COMPRENDER LA DEFINICIÓN DE CONGRUENCIA EN LOS TRIÁNGULOS Y CONOCER LOS CASOS DE CONGRUENCIA.**

**2**

**CONOCER LOS TEOREMAS DE APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA.**

**3**

**APLICAR LO APRENDIDO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN UNI.**



*PRODUCCIÓN EN MASA DE AUTOS*

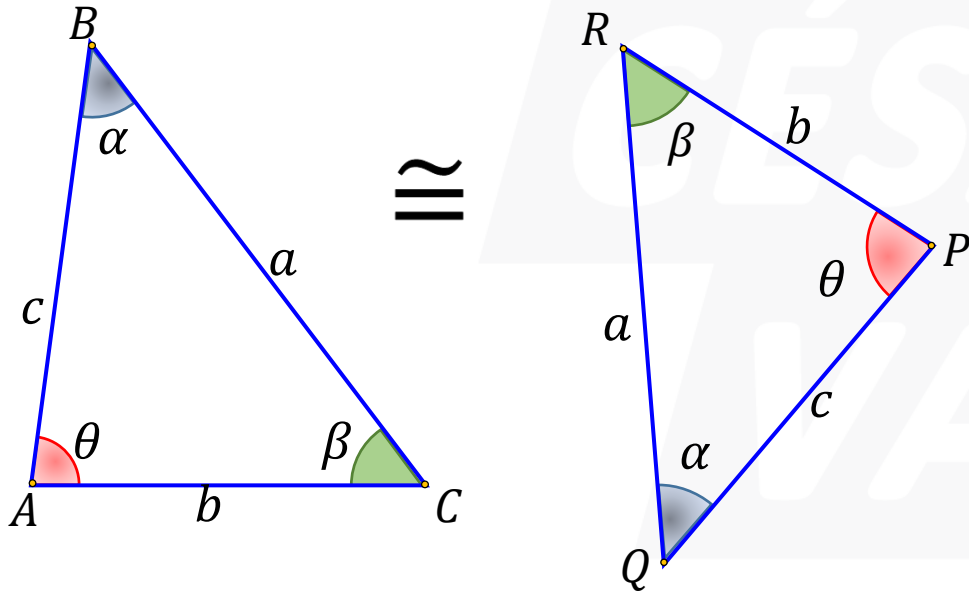


*REFLEJO*

# CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

## DEFINICIÓN:

Dos triángulos son congruentes cuando presentan sus tres medidas angulares respectivamente de igual medida y sus tres lados correspondientemente de iguales longitudes. Es decir cuando presentan todos sus elementos respectivamente iguales.



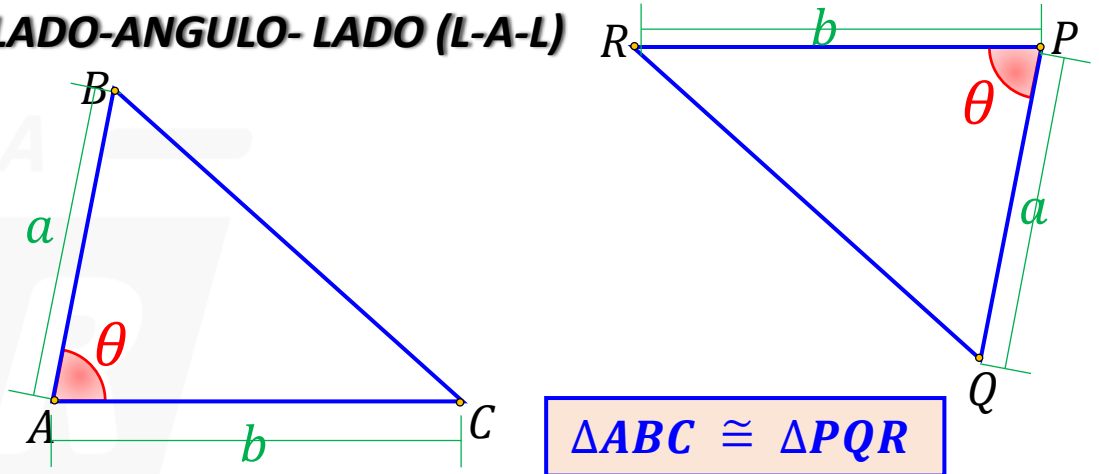
$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

NOTA:

$\cong$ : se lee es congruente a

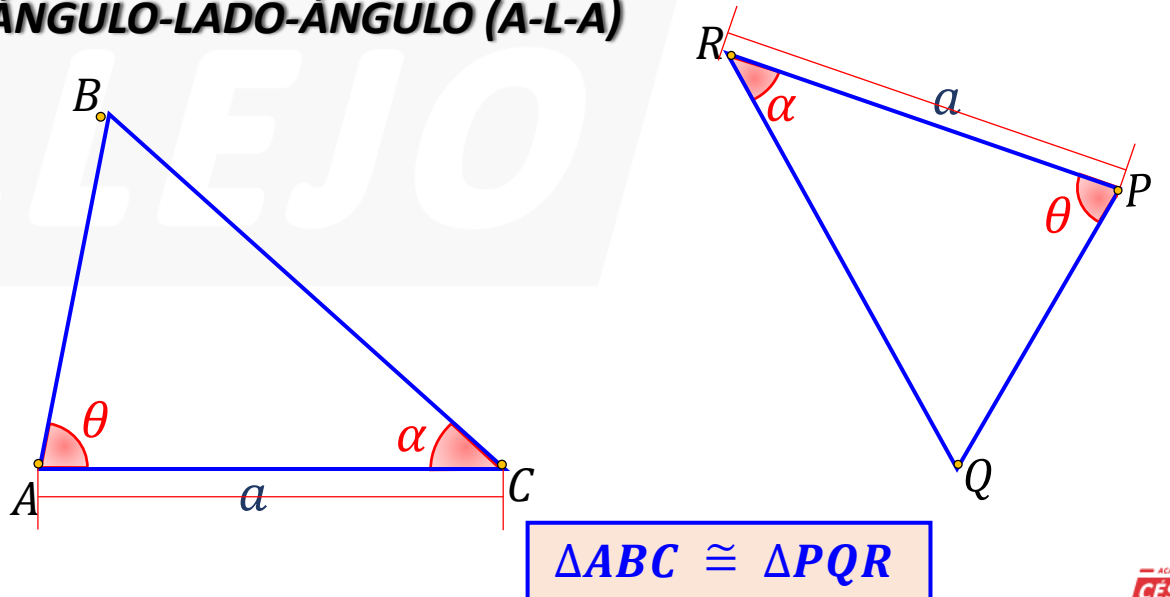
## CASOS DE CONGRUENCIA

### LADO-ÁNGULO-LADO (L-A-L)



$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

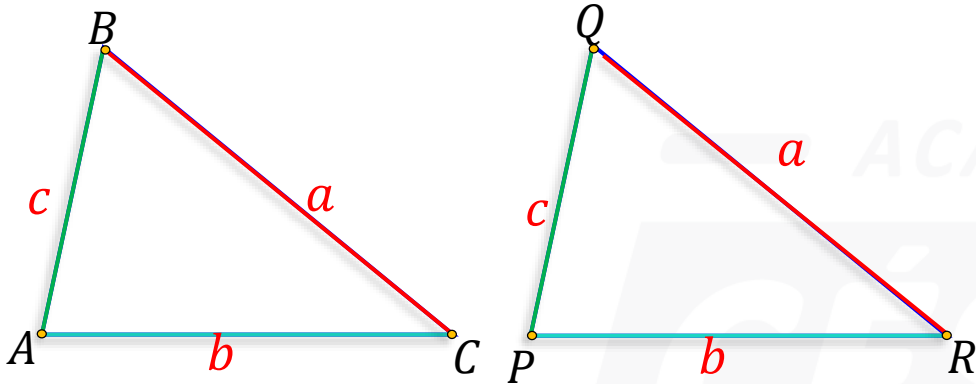
### ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (A-L-A)



$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

# CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

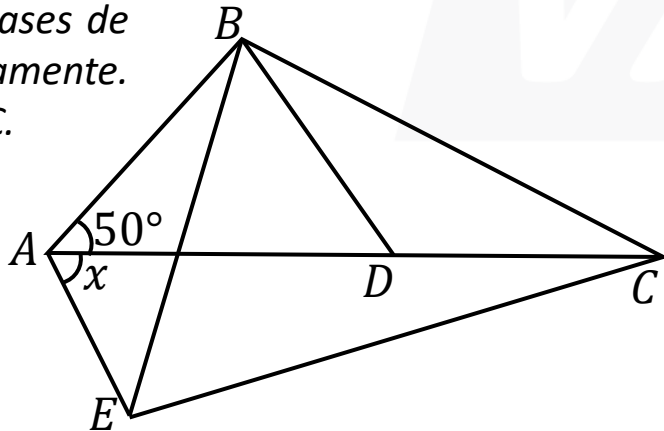
## LADO-LADO-LADO (L-L-L)



$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

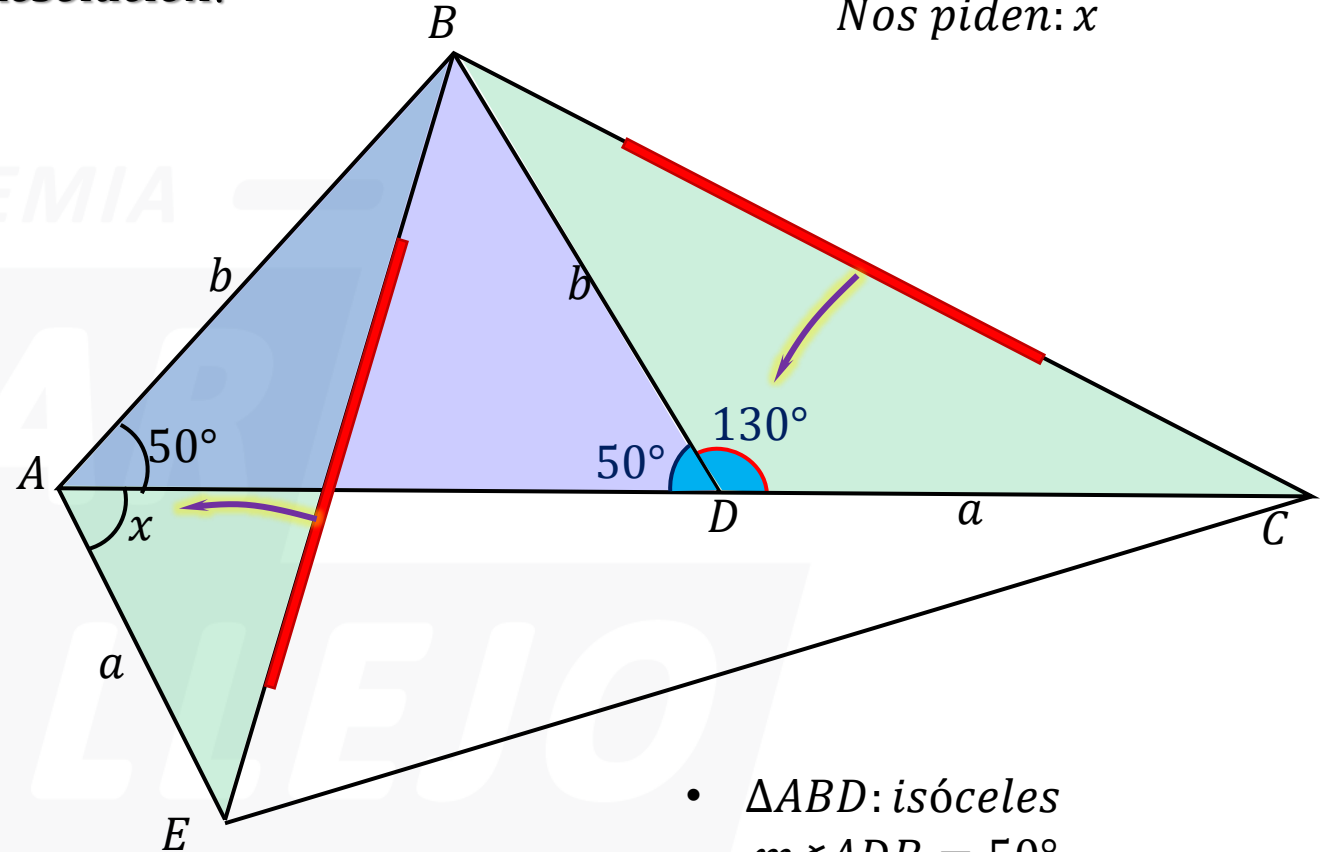
### EJEMPLO

Los triángulos  $ABC$  y  $BCE$  son isósceles de bases de  $AD$  y  $EC$  respectivamente. Calcule  $x$ , si  $AE=DC$ .



Resolución:

Nos piden:  $x$

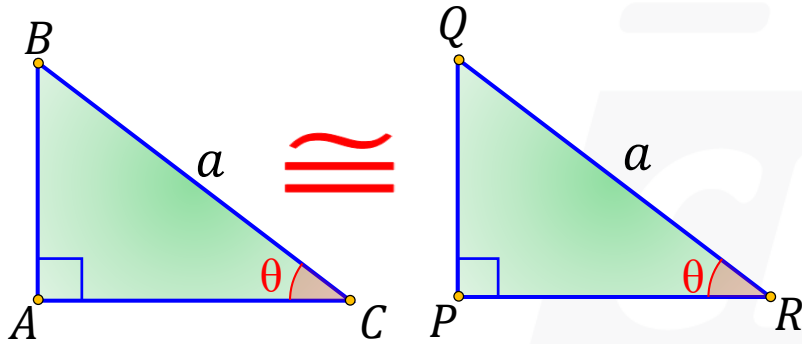


- $\triangle ABD$ : isósceles  
 $m\angle ADB = 50^\circ$
- $\triangle ABE \cong \triangle BDC$  (L - L - L)  
 $\rightarrow x + 50^\circ = 130^\circ$   
 $\therefore x = 80^\circ$

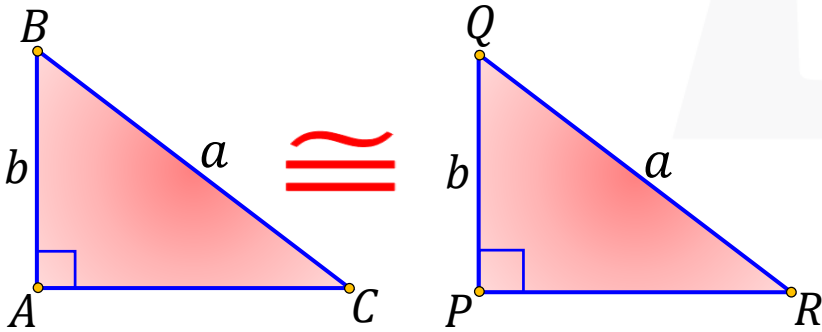
# CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

## NOTA

Una situación particular es la congruencia en los triángulos rectángulos, veamos algunas de ellas.



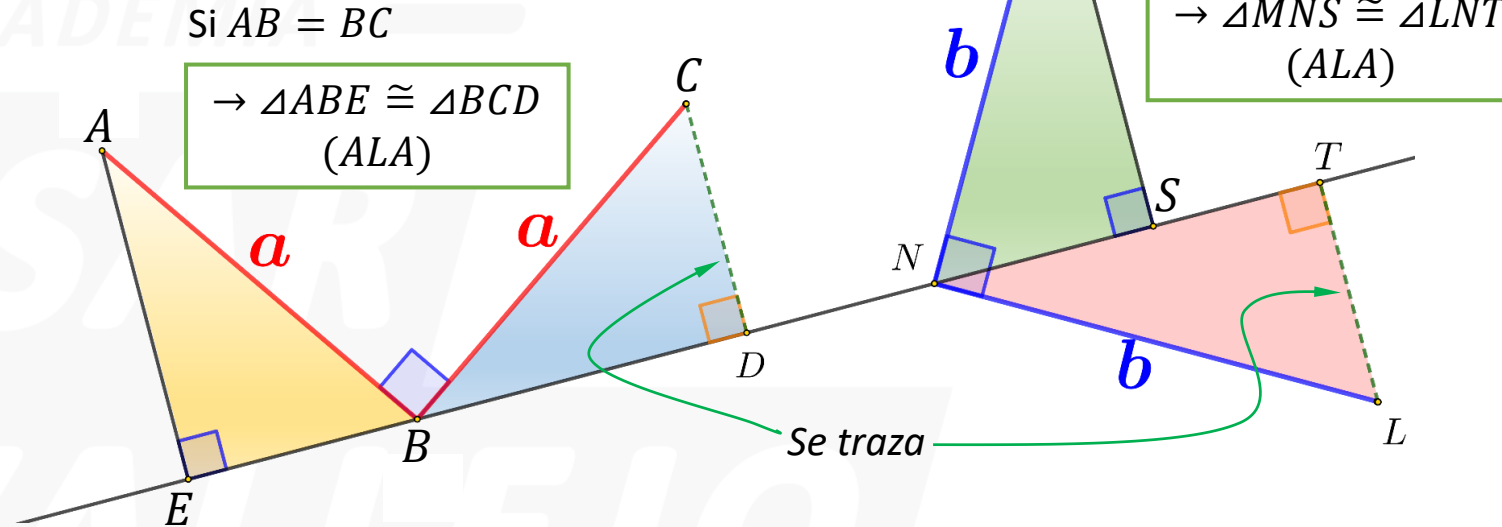
1er caso:  
Hipotenusa y ángulo (ALA)



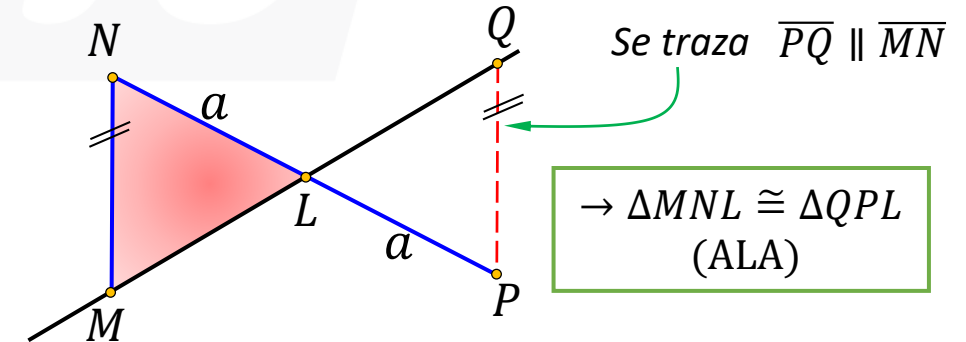
2do caso:  
Hipotenusa y cateto (LLL)

## OBSERVACIONES

- En los siguientes gráficos, una sugerencia es generar la congruencia indicada en la nota anterior



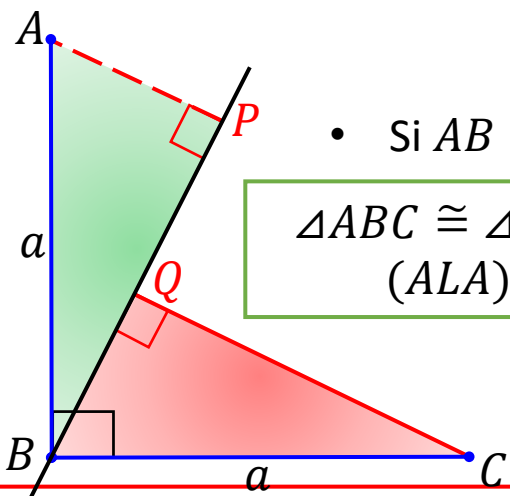
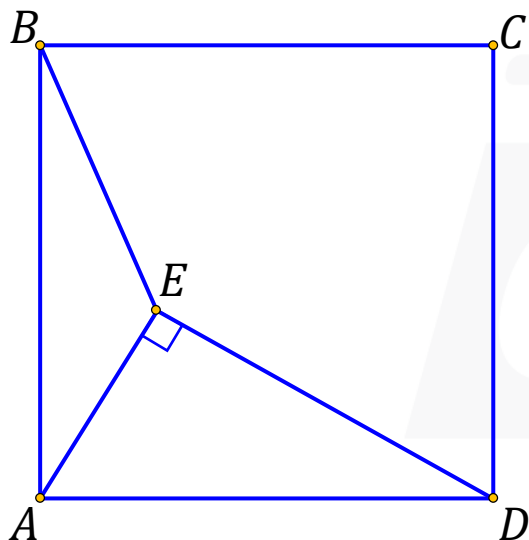
- En el siguiente gráfico, si  $NL = LP$ , una sugerencia es generar una congruencia, veamos:



# CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

## PROBLEMA TIPO ADMISIÓN

En el gráfico mostrado,  $ABCD$  es un cuadrado, donde  $AE = 5$  y  $ED = 8$  calcule el valor de  $BE$ .

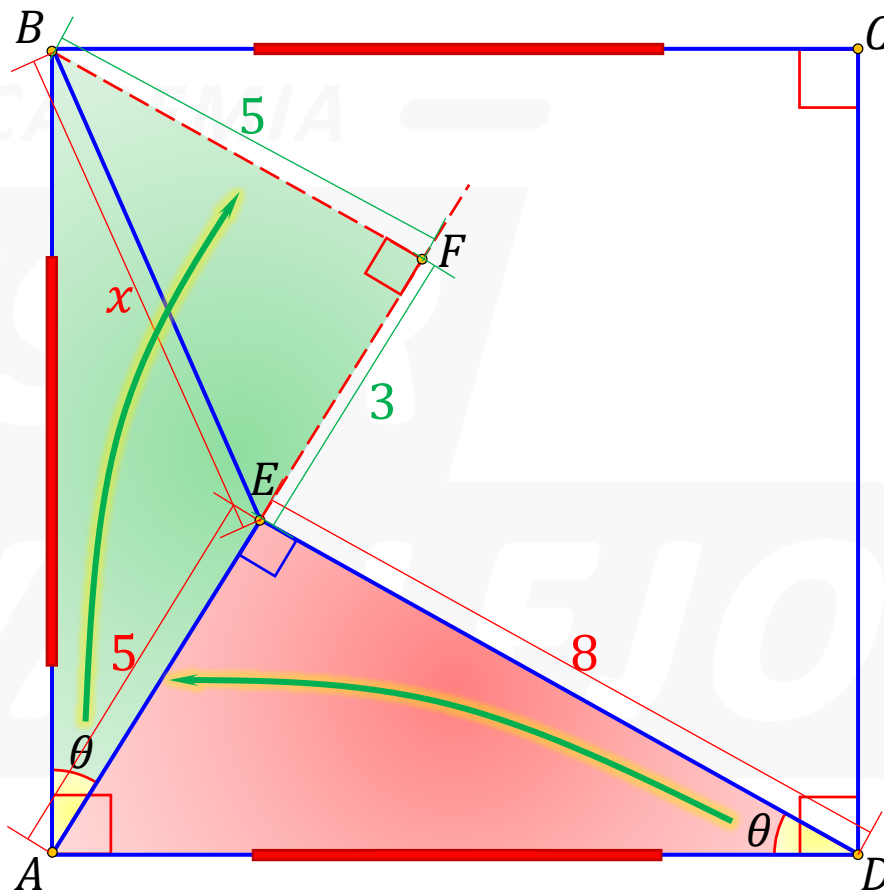


• Si  $AB = BC$

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR \text{ (ALA)}$$

### Resolución:

Nos piden  $BE = x$



- Como  $ABCD$  es un cuadrado, sabemos que:

$$AB = BC = CD = AD$$

Además sus lados son perpendiculares

- De la observación:

$$\triangle DAE \cong \triangle ABF \text{ (ALA)}$$

$$\rightarrow AE = BF = 5, AF = DE = 8$$

$$\rightarrow EF = 3$$

- En el  $\triangle EBF$ , aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 5^2 + 3^2$$

$$\rightarrow x^2 = 25 + 9$$

$$\therefore x = \sqrt{34}$$

o  
b  
s  
e  
r  
v  
a  
c  
i  
ó  
n

# APLICACIONES DE CONGRUENCIA

## TEOREMA DE LA BISECTRIZ:

Si  $\overrightarrow{OP}$  es bisectriz:

Se cumple:

$$a = b$$

Además:

$$OA = OB = m$$

## RECÍPROCO:

Si  $P$  equidista de los lados del ángulo:

$\rightarrow \overrightarrow{OP}$  es bisectriz:

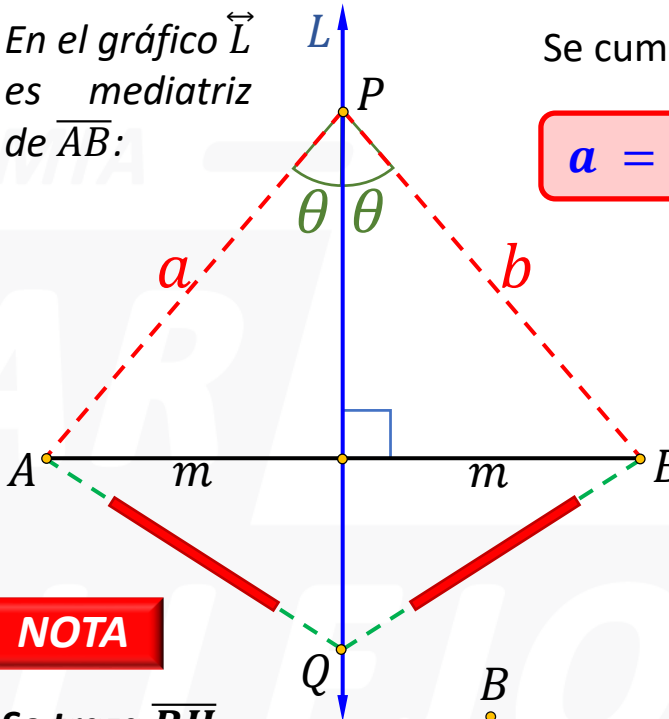
$$\phi = \psi$$

## TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

En el gráfico  $\tilde{L}$  es mediatriz de  $\overline{AB}$ :

Se cumple:

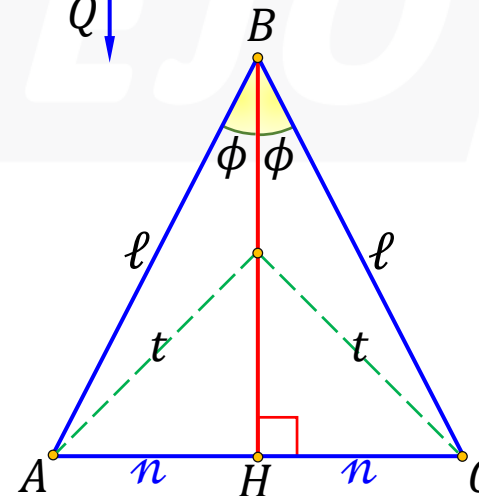
$$a = b$$



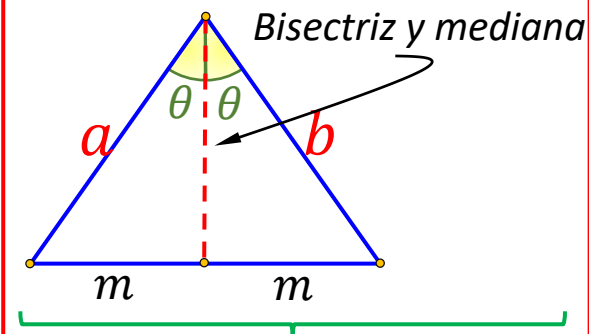
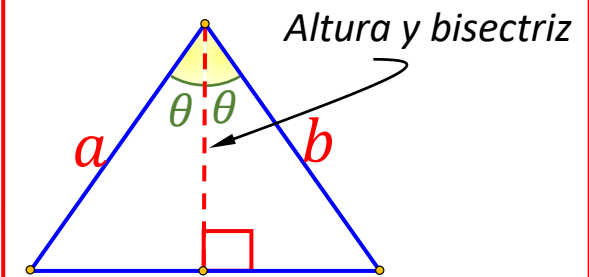
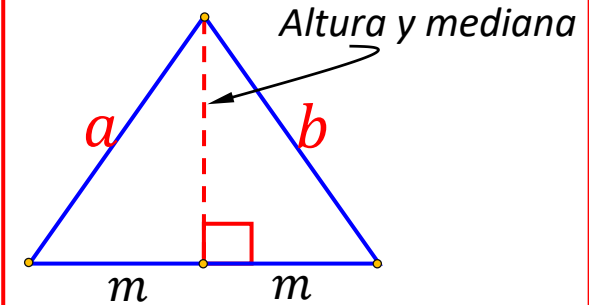
## NOTA

Se traza  $\overline{BH}$

- ✓ Altura
- ✓ Mediana
- ✓ Bisectriz interior
- ✓ Porción de mediatriz



## OBSERVACIÓN



Para los tres casos

$$a = b$$

# APLICACIONES DE CONGRUENCIA

## PROBLEMA

En un triángulo acutángulo  $ABC$ , se cumple que  $m\angle ABC = 3m\angle ACB$ . Si la mediatriz de  $\overline{BC}$  interseca a la prolongación de la bisectriz interior  $\overline{BM}$  en el punto  $P$ , entonces el mayor valor entero de la medida (en grados sexagesimales) del ángulo  $PCA$  es

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| A) 11 | B) 12 | C) 13 |
| D) 14 |       | E) 15 |

## RESOLUCIÓN:

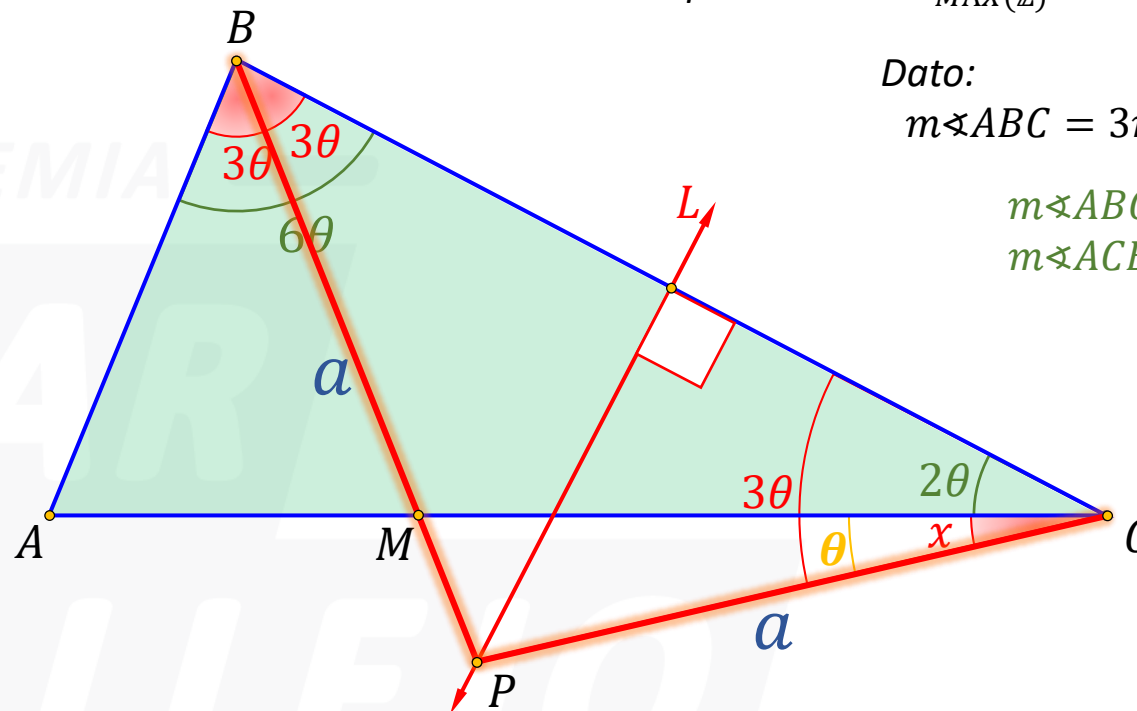
Nos piden  $m\angle PCA_{\text{MÁX}(\mathbb{Z})} = x$

Dato:

$$m\angle ABC = 3m\angle ACB$$

$$m\angle ABC = 6\theta$$

$$m\angle ACB = 2\theta$$



- Como  $\vec{L}$  es mediatriz del  $\overline{BC}$ .  
Por teorema de la mediatriz:

$$PB = PC = a$$

- Ósea el  $\Delta BPC$  es isósceles:  
 $m\angle PCB = m\angle PBC = 3\theta$   
 $\rightarrow x = \theta$

- Además, se sabe que el  $\Delta ABC$  es acutángulo:

$$m\angle ABC < 90^\circ$$

$$6\theta < 90^\circ$$

$$\theta < 15^\circ \text{ como } x = \theta$$

$$x < 15^\circ$$

$$x_{\text{máx}(z)} = 14^\circ$$

# APLICACIONES DE CONGRUENCIA

## TEOREMA DE LA BASE MEDIA

Si  $AM = MB$  y  $BN = NC$

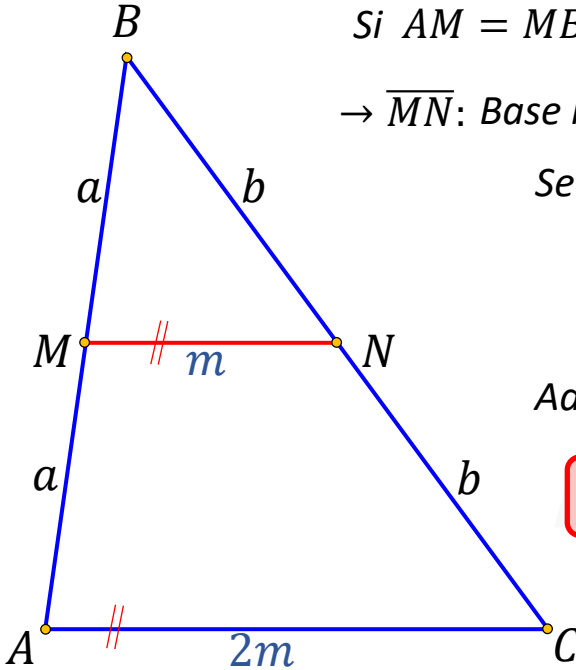
→  $\overline{MN}$ : Base media

Se cumple:

$$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$$

Además:

$$AC = 2(MN)$$



### OBSERVACIÓN

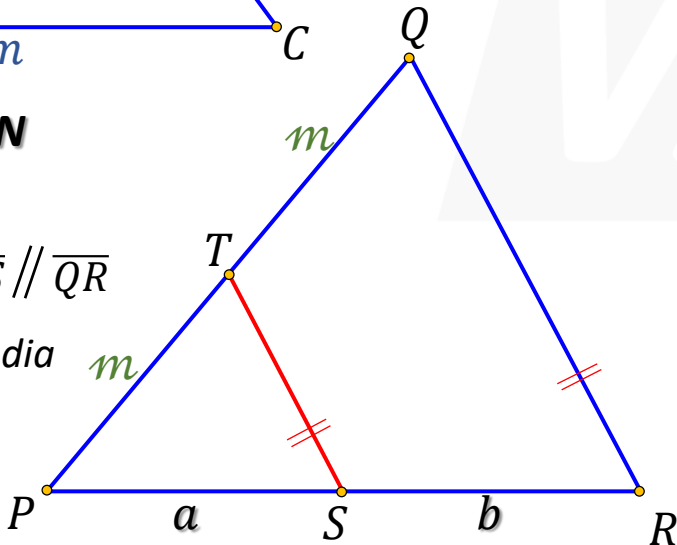
Si  $QT = TP$

y trazamos  $\overline{TS} \parallel \overline{QR}$

→  $\overline{TS}$ : Base media

Se cumple:

$$a = b$$



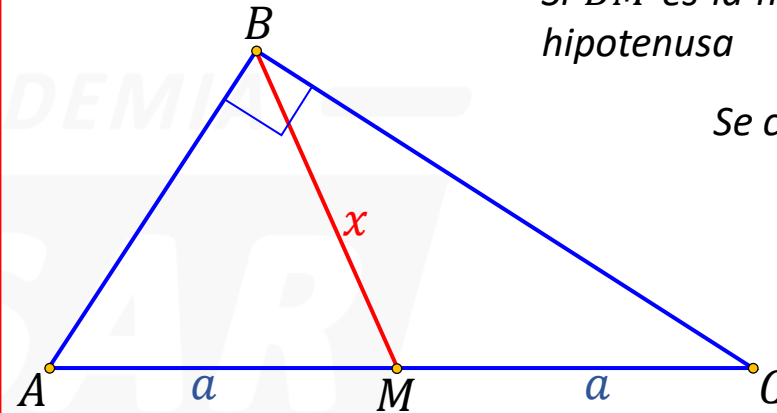
## TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

Si  $\overline{BM}$  es la mediana relativa a la hipotenusa

Se cumple:

$$BM = \frac{AC}{2}$$

$$\rightarrow x = a$$

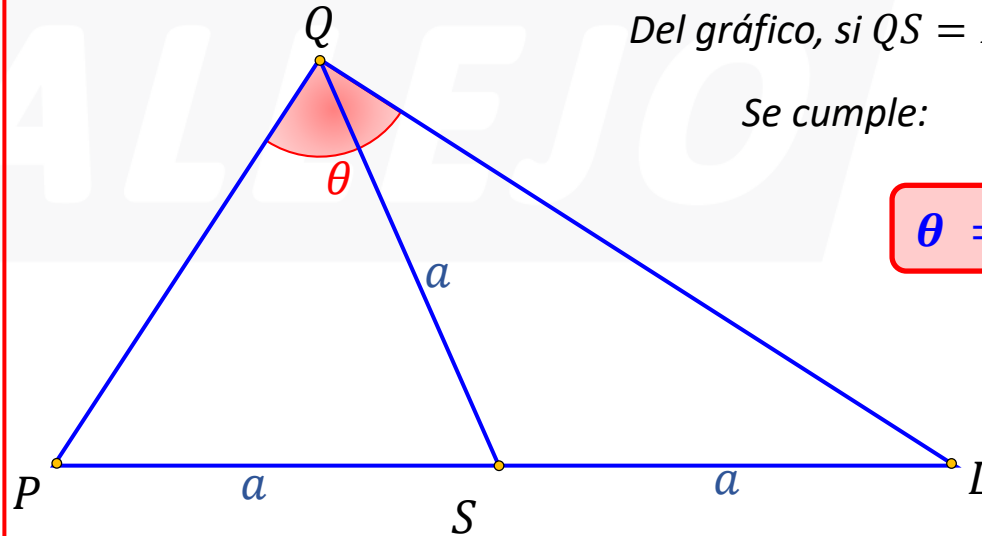


### OBSERVACIONES:

Del gráfico, si  $QS = PS = SL$

Se cumple:

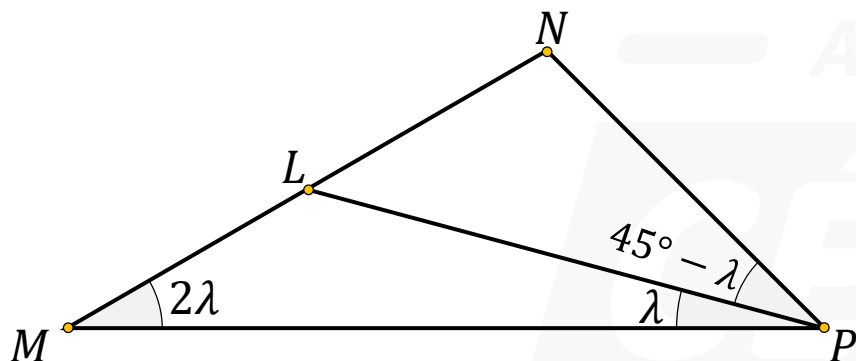
$$\theta = 90^\circ$$



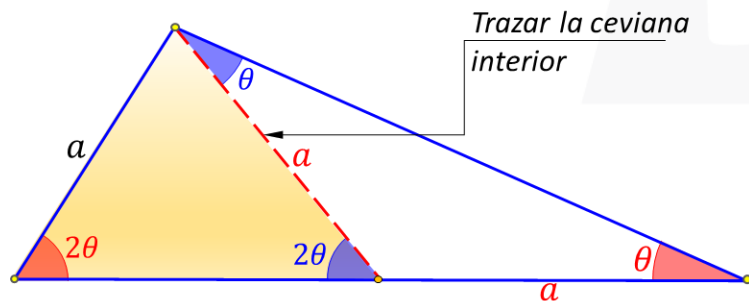
# APLICACIONES DE CONGRUENCIA

## PROBLEMA TIPO ADMISIÓN

En el gráfico,  $ML = LN$ , calcule el valor de  $\lambda$



RECORDAR



## RESOLUCIÓN

Nos piden  $\lambda$

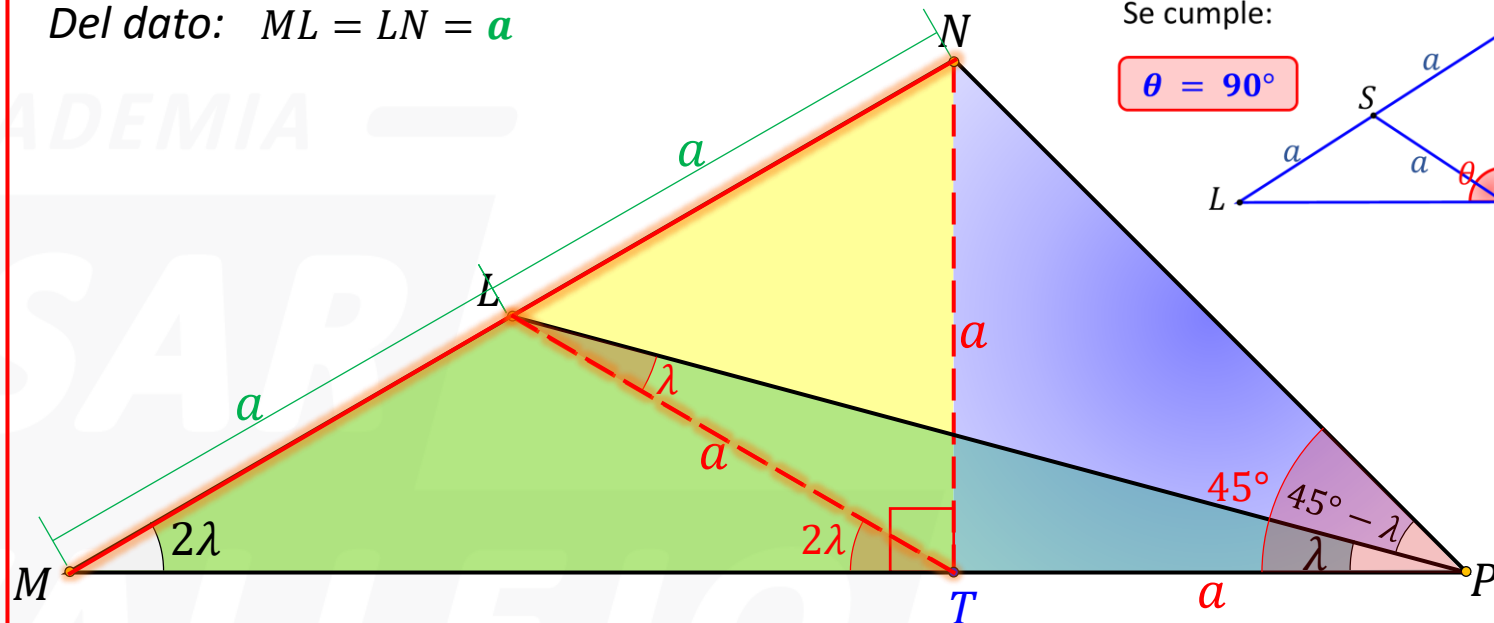
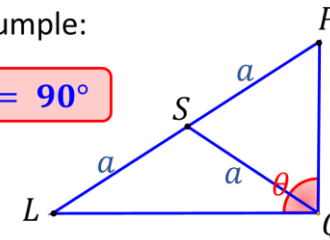
Del dato:  $ML = LN = a$

## observación

Si  $QS = PS = SL$

Se cumple:

$$\theta = 90^\circ$$

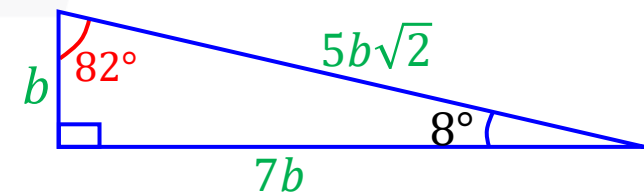
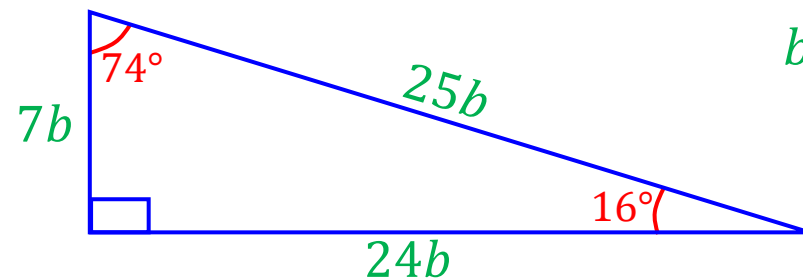
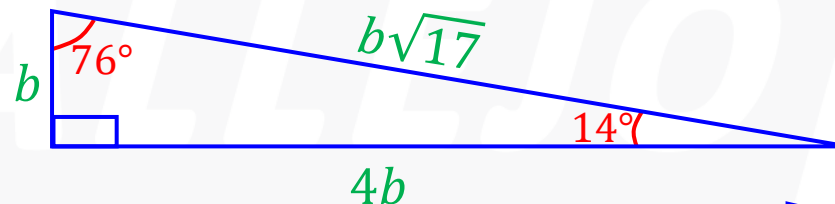
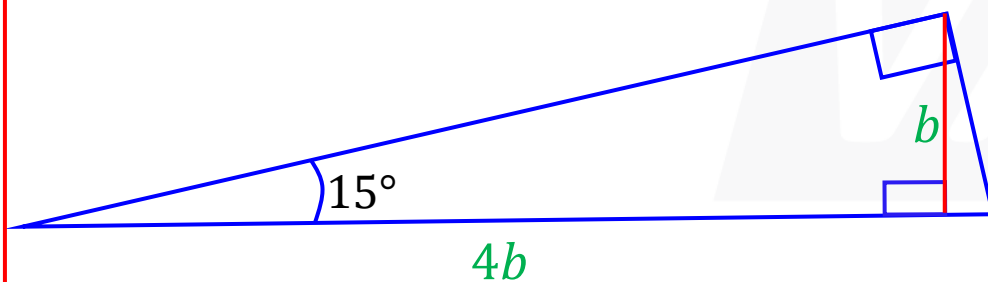
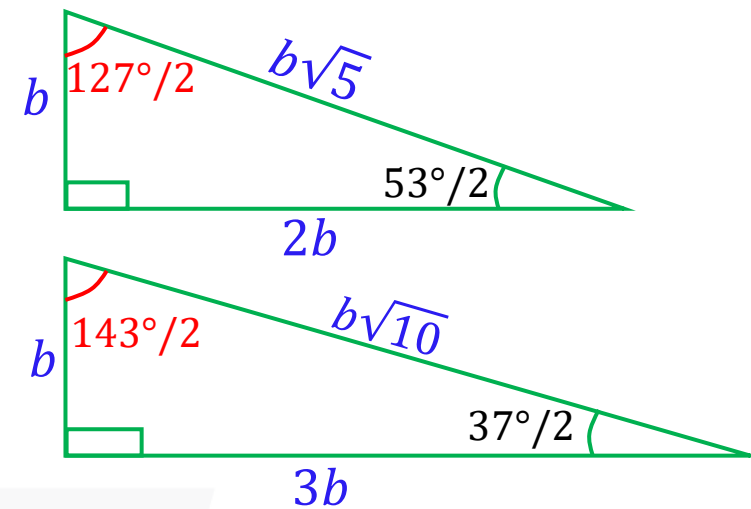
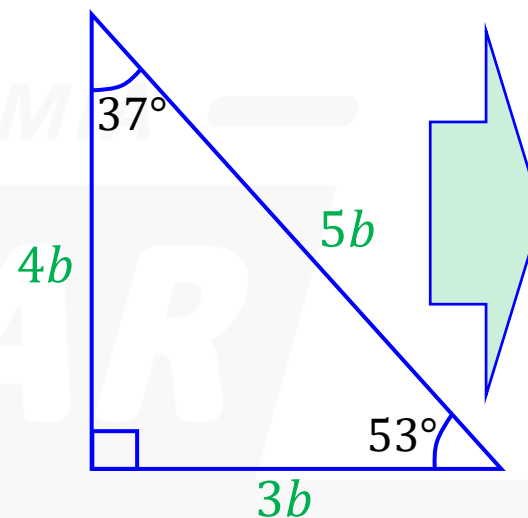
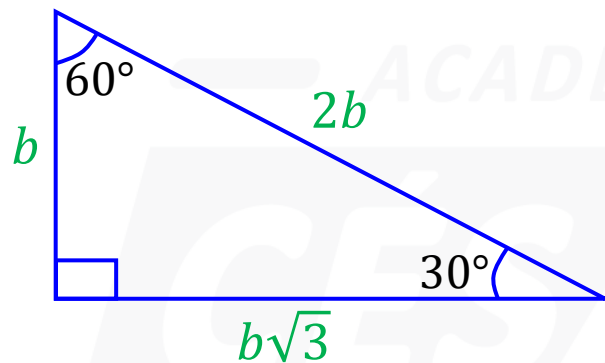
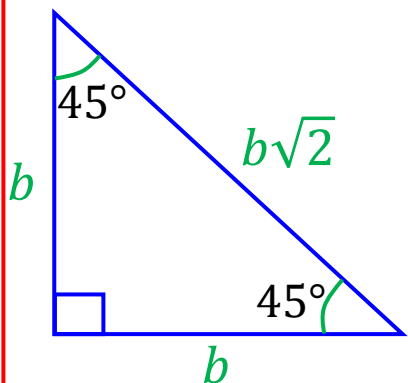


- En el  $\triangle MLP$ , de lo recordado, trazamos la ceviana interior  $\overline{LT}$
- Para aprovechar la observación, trazamos  $\overline{NT}$
- Luego  $\triangle NTP$  es notable de  $45^\circ$   
 $\rightarrow PT = TN = a$
- Entonces  $\triangle MNT$  es notable de  $30^\circ$   
 $\rightarrow 2\lambda = 30^\circ$

$$\therefore \lambda = 15^\circ$$

# APLICACIONES DE CONGRUENCIA

## TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES Y APROXIMADOS



— ACADEMIA —

**GRACIAS**

**VALLEJO**

— ACADEMIA —

**CÉSAR**

**VALLEJO**

— ACADEMIA —

**CÉSAR**

**VALLEJO**

**GRACIAS**

SÍGUENOS:   

[academiacesarvallejo.edu.pe](https://academiacesarvallejo.edu.pe)